

彭·高数

期末试题集

(2021 版)



彭康书院学业辅导与发展中心

2020 年高数上期末试题

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $y = \ln \frac{1-x}{1+x^3}$ 的麦克劳林展开式中 x^{2021} 的系数为_____.

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right] =$ _____.

3. 反常积分 $\int_1^3 \ln \sqrt{\frac{\pi}{|2-x|}} dx =$ _____.

4. 设 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$, 则 $\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{t=0} =$ _____.

5. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(k + \frac{1}{n}\right)^2 \tan \frac{1}{n^3} =$ _____.

二、单选题（每题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{2x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处 ()

- (A) 连续且取极大值 (B) 凑数选项
(C) 可导且导数不为 0 (D) 可导且导数为 0

2. 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某领域内连续且 $f(0) = 0$, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1-\cos x} = 2$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处 ()

- (A) 不可导 (B) 可导且导数不为 0
(C) 取得极大值 (D) 取得极小值

3. 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解可设为 (a, b 为常数) ()

- (A) $ae^x + b$ (B) $axe^x + b$
(C) $ae^x + bx$ (D) $axe^x + bx$

4. 函数 $y = \frac{1}{(e^x-1)(x-2)} \ln|1+x|$ 的间断点个数是 ()

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $y = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x}$ 是 ()

- (A) 有界的但不是无穷大量 (B) 无穷大量
(C) 有界的但不是无穷小量 (D) 无穷小量

三、计算题

1. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t \sin t + \tan^3 t \cdot \ln t) dt}{\cos x \int_0^x \ln^2(1+t) dt}$ 的值.

2. 讨论函数 $f(x) = |x|^{\frac{1}{20}} + |x|^{\frac{1}{21}} - 2\cos x$ 的零点个数.

3. 求微分方程 $(y+1)y'' + (y')^2 = (1+2y+\ln y)y'$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 的解.

4. 计算积分 $\int_{-1}^1 \frac{2x^2 + x^2 \sin x}{1 + \sqrt{1-x^2}} dx$.

5. 将圆周 $x^2 + y^2 = 4x - 3$ 绕 y 轴旋转一周, 求所得旋转体体积.

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} a \sin^2 x + b \sin x + c, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x^k \sin \frac{1}{k}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微, 讨论常数 a, b, c 以及 k 的取值.

7. 求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t)e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

8. 求线性微分方程组 $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 的通解.

四、证明题

1. 已知等式两端的两个积分都收敛, 且 $a, b > 0$, 求证: $\int_0^{+\infty} f(ax + \frac{b}{x}) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt$.

2. 设 $0 < x_1 < 3, x_{n+1} = \sqrt{x_n(3-x_n)} (n=1, 2, \dots)$. 求证: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 并求其极限.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$. 求证:

(1) $\exists \xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 0$;

(2) $\exists \eta \in (0, 1)$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$.

2019 年高数上期末试题

一、填空题

1. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x} \sin x + \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 - 1} \right)$ 的值为_____.
2. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 - n^2}} \right) =$ _____.
3. 设函数 $f(x) = (x^2 + x + 2) \sin x$, 则 $f^{10}(0) =$ _____.
4. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 两个函数 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$ 与 $g(x) = x^k (e^x - 1)$ 是同阶的无穷小量, 则常数 k 的值为_____.
5. 曲线 $y = x + \frac{1}{e^x - 1}$ 的渐近线有_____条.

二、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{\ln(1 + x^2)}$.
2. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & x \leq 0 \\ e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$, 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx$.
3. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = t^2 - t \\ te^y + y + 1 = 0 \end{cases}$, 求该曲线在 $t = 0$ 处的切线方程.

4. 设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x (x-t)f(t)dt = x(x-2)e^x + 2x$, 求:

(1) $f(x)$ 的表达式. (2) $f(x)$ 的单调区间与极值.

5. 计算反常积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

6. 求微分方程 $y'' + 2y' + y = e^{-x} + x$ 的通解.

7. 求初值问题 $\begin{cases} (1+x^2)y'' = 2xy' \\ y(0) = 1, y'(0) = 3 \end{cases}$ 的解.

8. 求线性微分方程组 $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} x$ 的通解.

三、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续, 在 $(0,1)$ 内大于 0, 并满足 $xf'(x) = f(x) - 3x^2$, 曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x=1$, $y=0$ 所围图形 D 的面积为 2, 求:

- (1) 函数 $f(x)$. (2) D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

2. 已知 $f(x) = \int_x^{x+\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt$.

- (1) 证明: $f(x)$ 是以 π 为周期的函数.
(2) 求函数 $f(x)$ 的值域.
(3) 求由 $y = f(x)$, $x=0$, $x=\pi$, $y=0$ 所围图形的面积.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上具有二阶连续导数, 且 $f(1) = 0$.

试证: 存在 $\xi \in [0, 2]$, 使得 $f''(\xi) = 3 \int_0^2 f(x) dx$.

4. (1) 设 n 是正整数, 计算 $\int_0^{n\pi} x |\sin x| dx$.

(2) 证明对任意正实数 p , 函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} \int_0^x t |\sin t|^p dt$ 存在.

2. 设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则定积分 $\int_0^{2018} (x - [x]) dx$ 的值是_____.
3. 已知 $y_1 = e^{3x} - xe^{2x}$, $y_2 = e^x - xe^{2x}$, $y_3 = -xe^{2x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程的通解是 $y =$ _____.
4. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + 3 \sin \frac{3}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n}) =$ _____.
5. 设 $f(x) = (x-1) \ln(2-x)$ ($x < 2$), 则 $f(x)$ 的最大值点是 $x =$ _____.

三、计算积分

1. 计算积分 $\int \frac{1}{\sin^2 x + 9 \cos^2 x} dx$.
2. 计算积分 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t} dt$.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

四、解答题

1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}(x-3)y^4 = 0$ 的通解.

2. 已知 $y_1 = x$, $y_2 = x + e^x$, $y_3 = 1 + x + e^x$ 是 $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = Q(x)$ 的解, 试求此方程的通解.

3. 求曲线 $y = 3(1 - x^2)$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y = 3$ 旋转一周所得的旋转体的体积.

4. 对 t 取不同的值, 讨论函数 $f(x) = \frac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间 $[t, +\infty)$ 上是否有最大值或者最小值? 若存在最大值或者最小值, 则求出相应的最大值和最大值点, 或者最小值和最小值点.

5. 求微分方程 $x''+2x'+2x=te^{-t}\cos t$ 的通解.

6. 设 $f'(x)$ 是连续函数, $F(x)=\int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$, 证明: $F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)$.

7. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, 且 $f(0)=f(1)=0$, 求证:

$$(1) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \int_0^1 xf(x)dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2-t)f'(x)dx.$$

$$(2) \quad \left(\int_0^1 xf(x)dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx, \text{ 等号当且仅当 } f(x)=A(x^3-x) \text{ 时成立, } A \text{ 为常数.}$$

2017 年高数上期末试题

一、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1 + \tan x)}{\sin^2 x}$.

2. 设 $f(x) = \frac{x(x+1)}{|x|(x^2-1)}$, 试讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 0 \\ 2^x, & x \geq 0 \end{cases}$, 求导函数 $f'(x)$.

4. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定, 求 dy .

5. 求不定积分 $\int \sqrt{e^x + 1} dx$.

6. 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t} \cos t dt$, 试求 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值和最小值.

7. 求由曲线 $x^2 + (y-5)^2 = 16$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

8. 求微分方程 $y''' - y'' + 2y' - 2y = 0$ 的通解.

9. 求微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ 的通解.

二、解答题

1. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$, 求 $f(x)$ 的表示式.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 在某邻域 $U(a)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k} = l$ ($l > 0, k$ 为正整数),

试讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处是否取得极值.

3. 求微分方程 $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ 满足 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的特解.

4. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求解微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}$.

(2) 设曲线积分 $\int_{(C)} [f''(x) + 9f(x) + 2x^2 - 5x + 1]y dx + 2f'(x)dy$ 与路径无关, 求 $f(x)$.

5. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = 4t - t^2 \end{cases} (t \geq 0)$.

(1) 讨论曲线 L 的凹凸性.

(2) 过点 $(-1, 0)$ 引曲线 L 的切线, 求切点坐标 (x_0, y_0) , 并求切线的方程.

(3) 求此切线与曲线 L (对应于 $x \leq x_0$ 的部分) 及 x 轴所围成的平面图形的面积 S .

6. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上满足: $|f''(x)| \leq M$, 且在 $(0, 1)$ 内 $f(x)$ 取得最大值, 试证:

$$|f'(0)| + |f'(1)| \leq M.$$

三、计算题

1. 求极限 $l = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 - xe^y$ 确定, 求曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程.

4. 计算反常积分 $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$.

5. 求函数 $f(x) = \frac{x \ln|x|}{|x-1|}$ 的间断点, 并说明间断点类型.

四、解答题

1. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt = -\frac{x^2}{2} + e^{-x} - 1$, 求曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

2. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))

(1) 求解微分方程组 $\frac{dx}{dt} = Ax$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- (2) 求方程 $y'' + 2y' + y = 2xe^{-x}$ 的通解.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $xf'(x) = f(x) + 3x^2$, 求 $f(x)$, 使由曲线 $y = f(x)$ 与 $x=0$, $x=1$, $y=0$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减小的导函数 $f'(x)$, $f(0)=0$, 证明: 对于满足不等式 $0 < a < b < a+b < c$ 的 a, b , 有 $f(a) + f(b) \geq f(a+b)$.

2015 年高数上期末试题

一、填空题

1. 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\ln \frac{2-x}{2+x} + \cos^2 x \right) dx =$ _____.

2. 设函数 $y = x2^x$ 在 $x = x_0$ 点处取得极小值, 则 $x_0 =$ _____.

3. 计算极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}} \right] =$ _____.

4. 设函数 $y = y(x)$ 满足方程 $\int_0^x xy dx = x^2 + y$, 则 $y(x) =$ _____.

5. 设函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有连续的二阶导数, $\varphi(0) = b$, $a > 0$ 且 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 处取得极大值 $\varphi(a) = 0$, 则积分 $\int_0^a x\varphi''(x) dx =$ _____.

二、选择题

1. 设函数 $f(x)$ 连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 ()

- A. 当 $f(x)$ 为奇函数时, $F(x)$ 必为偶函数
- B. 当 $f(x)$ 为偶函数时, $F(x)$ 必为奇函数
- C. 当 $f(x)$ 为周期函数时, $F(x)$ 必为周期函数
- D. 当 $f(x)$ 为单调递增函数时, $F(x)$ 必为单调递增函数

2. 曲线 $y = (x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$ 的拐点是 ()

- A. (1,0)
- B. (2,0)
- C. (3,0)
- D. (4,0)

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数, 且 $f(0) = 0$, 令 $M = \max_{x \in [0,1]} |f'(x)|$, 则必有 ()

- A. $M \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq 3M$
- B. $\frac{M}{2} \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq M$
- C. $\int_0^1 |f(x)| dx \leq \frac{M}{2}$
- D. $\int_0^1 |f(x)| dx \geq 3M$

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数, 下列函数中以 T 为周期的函数是 ()

A. $\int_0^x f(t)dt$

B. $\int_0^x f(t)dt - \int_{-x}^0 f(t)dt$

C. $\int_{-x}^0 f(t)dt$

D. $\int_0^x f(t)dt + \int_{-x}^0 f(t)dt$

5. 设函数 $f(x) = \int_0^{x^2} \ln(2+t)dt$, 则 $f'(x)$ 的零点个数为 ()

A. 0

B. 2

C. 1

D. 4

三、解答题

1. 求曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(e^{-x} + 1)$ 的渐近线.

2. 设函数 $F(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$, 试求:

(1) $F(x)$ 的极值.

(2) 曲线 $y = F(x)$ 的拐点的横坐标.

(3) 计算 $\int_{-2}^3 x^2 F'(x) dx$.

3. 求解初值问题
$$\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1 \end{cases}$$

4. 求一个以四个函数 $y_1 = e^x, y_2 = 2xe^x, y_3 = \cos 2x, y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的齐次线性微分方程, 并求方程的通解.

5. 求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{2x}$ 的通解.

6. 过曲线 $y = \sqrt[3]{x} (x \geq 0)$ 上点 A 作切线, 使该切线与曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 及 x 轴所围平面图形 D 的面积

$$S = \frac{3}{4}.$$

(1) 求点 A 的坐标.

(2) 求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

7. 设 a, b 均为常数且 $a > -2, a \neq 0$, 问 a, b 为何值时, 有:

$$\int_1^{+\infty} \left[\frac{2x^2 + bx + a}{x(2x+a)} - 1 \right] dx = \int_0^1 \ln(1-x^2) dx$$

2014 年高数上期末试题

一、计算题

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

$$2. \text{ 已知 } \int_1^{\cos x} f(t) dt = \cos 2x, \text{ 其中 } f(t) \text{ 连续, 求 } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$3. y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \text{ 求 } dy.$$

$$4. \text{ 求不定积分 } \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$5. \text{ 求定积分 } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx.$$

6. 求微分方程 $(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$ 的通解.

7. 求微分方程 $x''+3x'+2x=e^{-2t}$ 的通解.

8. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))

(1) 验证微分方程组 $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t & \frac{1}{2} \sin 2t - 1 \\ \frac{1}{2} \sin 2t + 1 & \sin^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ 通解

$$\bar{x} = C_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, t \in R.$$

(2) 验证 $y_1 = e^x, y_2 = e^x \ln|x|$ 是微分方程 $xy'' - (2x-1)y' + (x-1)y = 0$ 的解, 并求其通解.

9. 计算反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$.

二、解答题

1. 当 $x \in [-1, 1]$ 时, 确定函数 $f(x) = \frac{\tan \pi x}{|x|(x^2 - 1)}$ 的间断点及其类型.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (\sin \frac{1}{x}) \int_0^x \sin t^2 dt & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 求 $f'(x)$, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性.

3. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

(2) 已知函数 $y = e^{2x} + (x+1)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 的一个特解, 试确定 a, b, c , 并求该方程的通解.

4. 设曲线 l_1 的方程为 $y = a \ln x$ (其中常数 $a > 0$), 曲线 l_1 的一条切线 l_2 过原点.

(1) 求曲线 l_1 , 切线 l_2 以及 x 轴围成的平面图形的面积.

(2) 求此平面图形绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上连续, 在 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0) \neq 0$.

(1) 证明: 对 $\forall x \in (0, l)$, $\exists \theta \in (0, 1)$, 使 $\int_0^x f(t) dt + \int_0^{-x} f(t) dt = x[f(\theta x) - f(-\theta x)]$.

(2) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \theta$.

2013 年高数上期末试题

一、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(x+1)}{1 - \cos x}$.

2. 设 $x \geq 0$, $\int_0^{x^2+x} f(t)dt = x^2$ 其中 $f(x)$ 连续, 求 $f(2)$.

3. 设 $y = \sin^2 3x + \cos \frac{x^2}{5} + \tan \sqrt{x}$, 求 y' .

4. 求不定积分 $\int x^3 \ln x dx$.

5. 求定积分 $\int_{-3}^3 (|x| + x) e^{-|x|} dx$.

6. 求微分方程 $xy' - y = x^3 \cos x$ 的通解.

7. 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

8. 计算反常积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

二、解答题

1. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x(x+1)}{\cos \frac{\pi}{2}x}, & x < 0 \\ \sin \frac{\pi}{x^2-4}, & x > 0 \end{cases}$ 的间断点及其类型.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 其中 $g(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(0) = 1$, $g'(0) = -1$ 试求:

(1) $f'(x)$. (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 处的连续性.

3. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ 的通解, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 设函数 u 的全微分 $du = [3f(x) + e^x]ydx + [2f'(x) + f(x)]dy$, 其中 $f(x) \in C^{(2)}$, 且 $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{5}$, 求 $f(x)$.

4. 以椭圆 $x = acost$, $y = bsint$ ($0 \leq t \leq 2\pi, 0 < b < a$) 的长轴为底, 作一个与上半椭圆内接的等腰梯形, 试求它的面积的最大值.

5. 设函数 $f \in C^{(1)}[a, b]$, 且 $f'(x) \leq M$ (M 为常数), 且 $f(a) = 0$, 证明:

$$(1) \int_a^b f(x)dx \leq \frac{1}{2}M(b-a)^2. \quad (2) \int_a^b f^2(x)dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

2012 年高数上期末试题

一、填空题

1. 函数 $F(x) = \int_1^x (2 - \frac{1}{\sqrt{t}}) dt$ ($x > 0$) 的单调递减区间为_____.

2. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, 则 $f(0) =$ _____, $f'(0) =$ _____.

3. 若 $f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ x+2 & \\ \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x} & x < 0 \end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$, 则 $a =$ _____.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ b(1-x^2) & x > 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 可微, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

5. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln(1+ax^2)$ 与 $g(x) = \sin^2 3x$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.

二、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x}$.

2. 求函数 $f(x) = \frac{x^2-5}{x-3} + \int_{-1}^1 (\sqrt{1-x^2} + x)^2 dx$ 的单调性和极值.

3. 求定积分 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx$.

4. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$ 的通解.

5. 求微分方程 $\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 0$ 的通解.

6. 设由曲线 $y = \cos x$ (其中 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$) 及 x 轴, y 轴所围成平面图形的面积被曲线

$y = a \sin x$ ($a > 0$) 二等分.

(1) 确定 a 的值.

(2) 求曲线 $y = \cos x$, $y = a \sin x$ 及 $x = 0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的立体的体积.

7. 设函数 $F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$, 其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 问:

(1) a 为何值时, $F(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 讨论 $F'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性.

8. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))

(1) 求线性微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ 的通解, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

(2) 求微分方程 $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 4e^t$ 的通解.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导 ($a > 0, b > 0$), 且满足方程 $2 \int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda(x^2-b^2)} f(x) dx = (b-a)f(b)$.

证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使 $2\lambda\xi f(\xi) + f'(\xi) = 0$.

10. 设微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$.

(1) 证明: 若 $1 + P(x) + Q(x) = 0$, 则方程有一特解 $y = e^x$; 若 $P(x) + xQ(x) = 0$ 则方程有一特解 $y = x$.

(2) 根据(1)的结论, 求 $(x-1)y'' - xy' + y = 0$ 的通解和满足初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1$ 的特解.

(3) 求 $(x-1)y'' - xy' + y = 1$ 满足初始条件 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[y(x)-1]}{x} = -1$ 的特解.

2011 年高数上期末试题

一、填空题

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x} & x < 0 \\ 3x^2 - 2x + k & x \geq 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 则常数 } k = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$2. \int_{-2}^2 (1+x)\sqrt{4-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$3. \text{微分方程 } y^{(3)} + y = 0 \text{ 的通解是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$4. \frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+\cos^2 t} dt = \underline{\hspace{2cm}}.$$

二、单选题

1. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 其周期为 4, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线

$y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线的斜率为 ()

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

2. 微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的一个特解应有形式 (a, b 为常数) ()

- A. $ae^x + b$ B. $axe^x + bx$ C. $ae^x + bx$ D. $axe^x + b$

3. $f(x) = \frac{(x^2 + x)(\ln|x|) \sin \frac{1}{x}}{x^2 - 1}$ 的可去间断点的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

4. 设 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\tan x} dx$, 则 ()

- A. $I_1 > I_2 > 1$ B. $1 > I_1 > I_2$ C. $I_2 > I_1 > 1$ D. $1 > I_2 > I_1$

三、计算题

1. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$.

2. 计算积分 $\int \frac{x \sin x}{\cos^5 x} dx$.

3. 求定积分 $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

4. 设 $\begin{cases} x = \int_1^{t^2} u du \\ y = \int_{t^2}^1 u^2 \ln u du \end{cases} \quad t > 1$, 求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$.

5. 求微分方程的通解: $xy' - 3y = x^4 e^x$.

6. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))

(1) 求微分方程组 $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ 的通解, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$.

(2) 求 $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ 的通解.

7. 在抛物线 $y = x^2 (0 \leq x \leq 8)$ 上求一点, 使得过此点所做切线与直线 $x = 8$ 及 x 轴所围图形面积最大.

8. (学习高数I者做 (1), 学习高数II者做 (2))

(1) 设广义积分 $\int_1^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛, 证明广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 绝对收敛.

(2) 计算 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3} dx$.

9. 设 $f''(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0$, 记 $\varphi(x) = \int_0^1 f'[1+(x-1)t] dt$, 求 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 的某个领域内的导数, 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性.

2010 年高数上期末试题

一、填空题

1. 在抛物线 $y = x^2$ 上与直线 $x + 2y = 0$ 垂直的切线方程是_____.
2. 若 $y_1 = 3, y_2 = 3 + x^2, y_3 = 3 + x^2 + e^x$ 都是微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的解 (其中 $p(x), q(x), f(x)$ 都是已知的连续函数), 则此方程的通解为_____.
3. 设 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 已知 $f(1) = 1, f'(x^2) = x^3$ 则 $f(4) =$ _____.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极值且满足 $f''(x) + 2f'(x) = \int_a^{x+1} e^{f(t)} dt$, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处()
 - A. 必取极大值
 - B. 必取极小值
 - C. 不可能取极值
 - D. 是否取极值不能确定
2. 设 $f(x) = 2x \ln(1-x), g(x) = \sin^2 x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的()
 - A. 同阶但非等价无穷小
 - B. 等价无穷小
 - C. 高阶无穷小
 - D. 低阶无穷小

三、解答题

1. 设 $y = \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}} (x > 1)$, 求 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{dy}{dx}$.

2. 设 $\begin{cases} x = \int_0^t e^{-u^2} du \\ y = e^{-t^2} (1+t^2) \end{cases}$, 求 $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=1}$.

3. 求不定积分 $\int e^x \ln(e^x + 1) dx$.

4. 求微分方程 $2xy' = y + 2x^2$ 的通解.

5. (学习高数I者做(1), 学习高数II者做(2))

(1) 求微分方程组 $\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}$ 的通解. 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 求微分方程 $y'' + y' - 2y = e^x$ 的通解.

6. 计算反常积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$.

7. 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过 $(0,0)$, $(1,2)$ 两点, 且 $a < 0$, 确定 a, b, c 的值与 x 轴所围图形 D 的面积最小值, 并求此图形 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 且 $f'(x) > 0$, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(2x-a)}{x-a} \text{ 存在, 证明在 } (a, b) \text{ 内存在点 } \xi, \text{ 使 } \frac{b^2 - a^2}{\int_a^b f(x) dx} = \frac{2\xi}{f(\xi)}.$$

彭康学导团持续招募中，搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描下方二维码，关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。

彭小招1.0

群号：647383944



PKSTU 微信公众号

